第6章 讨价还价

聂辉华 教授
中国人民大学经济学院
www.niehuihua.com
微信公号：NIE_HUIHUA

6.1 简单的讨价还价：分馅饼

生活中处处充满了讨价还价（bargaining，又译谈判）：女生侃价；商业谈判。但是标准的微观经济学理论却没有对价格决定的过程进行描述。博弈论弥补了这一缺陷。

考虑一个完全信息静态博弈（可以考虑做一个实验）。甲乙两人同时选择分配一个馅饼的比例，分别为 x_1 和 x_2。如果 $x_1+x_2\le 1$，那么两人分别得到所选择的份额 $\pi_1=x_1$ 和 $\pi_2=x_2$；如果 $x_1+x_2>1$，则 $\pi_1=\pi_2=0$。这个博弈有无穷多个纳什均衡，它们在直线 $x_1+x_2=1$ 上。要减少多重均衡，我们可以应用前面提到的聚点，它在解决与此博弈类似的离散模型——斗鸡博弈——时也可以发挥作用。一个比较常见的结果就是公平分配，即（0.5，0.5）。

接着考虑完全信息动态博弈。假定甲方先行动，那么他将获得先动优势，均衡为（1，0）。当然，这里涉及开集问题，我们撇开不管。这个博弈结果也许是“不公平”的，但是很“合理”。要考虑公平问题，我们可以采取合作博弈（cooperative game）的方法。

6.2 合作博弈：纳什谈判解

Nash（1950）较早地将公平因素纳入讨价还价问题，发展了合作博弈论。图 6－1 比较了非合作博弈和合作博弈的结果。

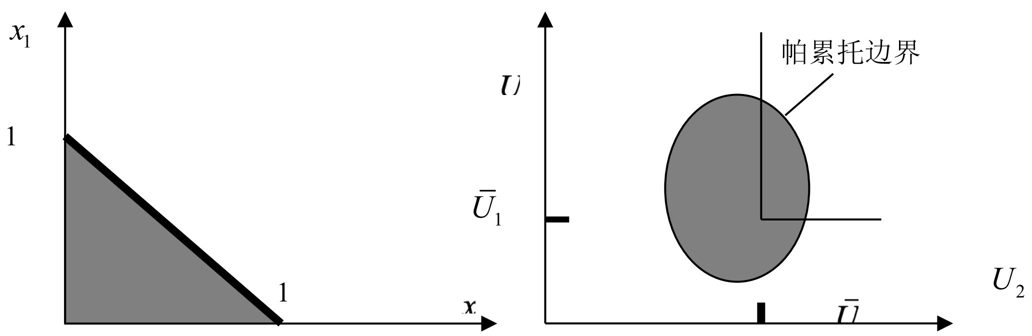

图 6－1（a）非合作博弈　图 6－1（b）纳什谈判解

图中，阴影部分是可行的分配集合 X，假定为凸集。保留效用为（$\bar{U}_1$，$\bar{U}_2$），纳什谈

判解为（U_1^*，U_2^*）。这个解是根据四个公理推导出来的。它们是：

（1）不变性（invariance）。对于任何单调递增的线性变化 F，合作解独立于衡量效用的单位，即$U^*[F(\bar{U}),F(X)]=F[U^*(\bar{U},X)]$。

（2）有效性（efficiency）。合作解满足帕累托最优，即$(U_1,U_2)>U^*\Rightarrow(U_1,U_2)\notin X$。

（3）独立于无关选择（independence of irrelevant alternatives）。如果我们从 X 中去掉一部分，得到较小的集合 Y，只要U^*不是去掉的部分，那么U^*将不变。该公理最受人质疑。正式地，$U^*(\bar{U},X)\in Y\subseteq X\Rightarrow U^*(\bar{U},Y)=U^*(\bar{U},X)$。

（4）匿名性（anonymity）或对称性（symmetry）。交换两个人的位置不影响合作解。

纳什证明，满足上述四条公理的解是唯一的：

$$U^*=\underset{U\in X,U\geq\bar{U}}{\arg\max}(U_1-\bar{U}_1)(U_2-\bar{U}_2) \tag{6-1}$$

式（6－1）的经济含义是，在满足全部分配完毕的前提下，最大化双方增量效用的乘积，就得到了合作解。

具体地应用到分饼博弈中，我们有

$$Max(x_1-0)(x_2-0)$$

$$s.t.\ \ x_1+x_2\leq 1$$

构造拉格朗日函数$L=x_1x_2+\lambda(1-x_1-x_2)$，略去 Kuhn-Tucker 条件，得到一阶条件

$x_1-\lambda=0$，$x_2-\lambda=0$，解得$x_1=x_2=1/2$。

与此同时，根据式（6－1），我们有$U_i=\bar{U}_i+\frac{1}{2}(U-\bar{U})$。

证明：

$$\begin{aligned}
&\underset{U\in X,U\geq\bar{U}}{Max}(U_1-\bar{U}_1)(U_2-\bar{U}_2)\\
&=(U_1-\bar{U}_1)(U-U_1-\bar{U}_2)\\
&=-U_1^2+(U+\bar{U}_1-\bar{U}_2)U_1-\bar{U}_1U+\bar{U}_1\bar{U}_2\\
&\Rightarrow\frac{\partial\ell}{\partial U_1}=-2U_1+U+\bar{U}_1-\bar{U}_2=0\\
&\Rightarrow U_1^*=\bar{U}_1+\frac{1}{2}(U-\bar{U})
\end{aligned}$$

注意到，利用上面这个式子同样可以得到（0.5，0.5）的均衡结果。

这个规则符合传统文化或者直觉吗？

练习：小王在联想公司时月工资为 6000 元。现在他跳槽到了 IBM 公司，每月可以为 IBM 创造价值 10000 元。请问，根据纳什谈判解，IBM 每月应该给小王多少钱？

解：$w = 6000 + \frac{1}{2}(10000 - 6000) = 8000$（元）

对比：合作博弈强调完整、公平、效率，带有道德因素。但是非合作博弈解更为直观，与理性人的本质是一致的。孰优孰劣，一时难以断言。Thaler（1992）等用大量实验证明了非合作博弈难以解释现实，而 Rabin（1993，AER）已经明显地将公平因素考虑进模型中了。

[注] 多人合作博弈的谈判解比较复杂，称为夏普利值（Shapley value），其表达式为

$$B_i = \sum_{S|i \in s} \frac{(s-1)!(I-s)!}{I!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

6.3 有限轮流出价

现在考虑重复时的分饼博弈，这是一种非合作博弈。假定甲方先出价 x_1，乙方决定接受还是拒绝，接受则博弈结束；如果乙方拒绝，他出价 x_2，甲方决定接受还是拒绝，…；最后一轮是时期 T，甲方最后出价 x_T，乙方决定接受还是拒绝，博弈结束。贴现因子为 $\delta \le 1$。

先考虑没有贴现的情况。由于甲方最后出价，因此他总可以全部占有整个饼，而留给乙方保留效用 0（这里涉及开集问题）。因此，唯一的子博弈完美纳什均衡结果是（1，0）。但是支持这个 SPE 的均衡却有许多，因为乙方在任何一期接受（博弈结束）之前都选择拒绝，也都是 SPE。多个均衡的唯一差别在于乙方最后决定接受的时间。

如果考虑贴现，最后的结果是不确定的，因时期的长短和贴现因子而不同。为了得到统一的解，我们需要利用无限期重复博弈的结果。

6.4 无限轮流出价

定理（Rubinstein，1982）：在存在贴现的无限期重复博弈中，完美均衡结果是唯一的。并且，如果甲方先行动，均衡结果为（$x_1 = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$，$x_2 = \frac{\delta_2 - \delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$）。

证明：

对于 T 期无穷博弈而言，我们无法使用逆向归纳法。但是根据 Shaked-Sutton（1984），从参与人 1（甲方）开始的每一个子博弈等价于从 t=1 开始的整个博弈。假定在某一 t 期博弈结束，甲方可以得到的最大份额是 M（百分比），那么为了让甲方在 t-1 期接受分配，乙方在 t-1 最多应该给甲方 $\delta_1 M$，自己最少得到 $1-\delta_1 M$；依次类推，我们可以总结为下表。

期数	甲方的份额(%)	乙方的份额(%)	出价者
t	M	1-M	甲
t-1	$\delta_1 M$	$1-\delta_1 M$	乙

t-2	$1-\delta_2(1-\delta_1 M)$	$\delta_2(1-\delta_1 M)$	甲
t-3	$\delta_1[1-\delta_2(1-\delta_1 M)]$	$1-\delta_1[1-\delta_2(1-\delta_1 M)]$	乙
t-4	$1-\delta_2+\delta_1\delta_2[1-\delta_2(1-\delta_1 M)]$	$\delta_2-\delta_1\delta_2[1-\delta_2(1-\delta_1 M)]$	甲

在 t-2 处截止，我们得到“甲方所能得到的最大份额”的两种表示方式，即

$$M=1-\delta_2(1-\delta_1 M)\Rightarrow M=\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

在 t-4 处截止，我们也可以得到同样的结果，说明这个结果是稳健的。注意到，$\frac{\partial M}{\partial \delta_1}>0$，$\frac{\partial M}{\partial \delta_2}<0$。因为贴现因子表示耐心程度、谈判成本或外部选择权，所以给定对方耐心不变，一个人越是有耐心，贴现因子越大（贴现率越小），就越是能从谈判中得到更多份额；给定自己耐心不变，对方越是有耐心，自己所得份额就越少。

相反，如果我们把 M 看作是甲方在某阶段得到的最小份额，运用类似逻辑，也可以得到同样的结果。因此，M 是唯一的结果。

注意到，当$\delta_1=\delta_2$，均衡结果简化为（$\frac{1}{1+\delta}$，$\frac{\delta}{1+\delta}$）。显然，$\frac{1}{1+\delta}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$。这是一种先动优势。当$\delta\to 1$时，结果趋于（0.5，0.5）；当$\delta\to 0$时，结果趋于（1，0）。

思考：假如小王和小李以前每人每月可以赚 3000 元，合伙开公司后每月总共可以赚 10000 元。假设贴现因子为 0.8，小王先出价。请计算两人根据纳什谈判解和鲁宾斯坦轮流出价解的结果。